Peter Smith, *Introduction to Formal Logic* (CUP, 2nd edition)

Exercises 22

(a) Warrant the following inferences by PL natural deduction proofs:

(1) $((\mathsf{P} \land \mathsf{Q}) \to \mathsf{R})\ \therefore\ (\mathsf{P} \to (\mathsf{Q} \to \mathsf{R}))$
(2) $(\mathsf{P} \to (\mathsf{Q} \to \mathsf{R}))\ \therefore\ ((\mathsf{P} \land \mathsf{Q}) \to \mathsf{R})$
(3) $((\mathsf{P} \lor (\mathsf{Q} \land \mathsf{R})) \to \bot)\ \therefore\ \neg(\mathsf{P} \lor (\mathsf{Q} \land \mathsf{R}))$
(4) $(\mathsf{P} \to \bot), (\mathsf{P} \lor \neg\mathsf{Q})\ \therefore\ (\mathsf{Q} \to \bot)$
(5) $(\mathsf{P} \land (\neg\mathsf{Q} \to \neg\mathsf{P}))\ \therefore\ (\neg\mathsf{P} \lor (\mathsf{Q} \land \mathsf{P}))$
(6) $((\mathsf{P} \land \mathsf{Q}) \to (\mathsf{Q} \land \mathsf{R})), (\mathsf{R} \to \neg\mathsf{P})\ \therefore\ (\mathsf{P} \to \neg\mathsf{Q})$
(7) $(\neg\mathsf{S} \to \neg\mathsf{R}), ((\mathsf{P} \land \mathsf{Q}) \lor \mathsf{R}), (\neg\mathsf{S} \to \neg\mathsf{Q})\ \therefore\ (\neg\mathsf{P} \lor \mathsf{S})$
(8) $(\neg\mathsf{P} \to (\mathsf{Q} \land \mathsf{R})), \neg(\mathsf{R} \lor \mathsf{P})\ \therefore\ \neg\mathsf{Q}$

Also give proofs warranting the following inferences:

(9) $\mathsf{Q}\ \therefore\ (\mathsf{P} \to \mathsf{Q})$
(10) $\neg(\mathsf{P} \to \mathsf{Q})\ \therefore\ \mathsf{P}$
(11) $\neg(\mathsf{P} \to \mathsf{Q})\ \therefore\ \neg\mathsf{Q}$
(12) $(\mathsf{P} \to (\mathsf{Q} \lor \mathsf{R}))\ \therefore\ ((\mathsf{P} \to \mathsf{Q}) \lor (\mathsf{P} \to \mathsf{R}))$

(b) Following the general definition in Exercises 20(b*), let's say in particular

> Some wffs are PL-consistent if we cannot use premisses from among them to prove $\bot$.

In each of the following cases, show that the given wffs are PL-*in*consistent, i.e. show that there *is* a PL proof of absurdity from them as premisses:

(1) $(\mathsf{P} \to \neg\mathsf{P}), (\neg\mathsf{P} \to \mathsf{P})$
(2) $(\neg\mathsf{P} \lor \neg\mathsf{Q}), (\mathsf{P} \land \mathsf{Q})$
(3) $((\mathsf{P} \to \mathsf{Q}) \land (\mathsf{Q} \to \neg\mathsf{P})), (\mathsf{R} \to \mathsf{P}), (\neg\mathsf{R} \to \mathsf{P})$
(4) $(\mathsf{P} \lor (\mathsf{Q} \to \mathsf{R})), (\neg\mathsf{R} \land \neg(\mathsf{P} \lor \neg\mathsf{Q}))$
(5) $(\neg\mathsf{P} \lor \mathsf{R}), \neg(\mathsf{R} \lor \mathsf{S}), (\mathsf{P} \lor \mathsf{Q}), \neg(\mathsf{Q} \land \neg\mathsf{S})$.

(c) Suppose that we use '$\leftrightarrow$' so that an expression of the form $(\alpha \leftrightarrow \gamma)$ is simply an *abbreviation* of the corresponding expression of the form $((\alpha \to \gamma) \land (\gamma \to \alpha))$. Warrant the following inferences by PL natural deduction proofs:

(1) $(\mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{Q})\ \therefore\ (\mathsf{Q} \leftrightarrow \mathsf{P})$
(2) $(\mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{Q})\ \therefore\ (\neg\mathsf{P} \leftrightarrow \neg\mathsf{Q})$
(3) $(\mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{Q}), (\mathsf{Q} \leftrightarrow \mathsf{R}) \therefore\ (\mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{R})$

Suppose alternatively that we introduce '$\leftrightarrow$' to PL as a fifth basic built-in biconditional connective. Give introduction and elimination rules for this new connective (rules which *don't* mention any other connective). Use these new rules to warrant (1) to (3) again. Also give proofs to warrant the following:

(4) $\mathsf{P}, \mathsf{Q}\ \therefore\ (\mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{Q})$
(5) $\neg(\mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{Q})\ \therefore\ ((\mathsf{P} \land \neg\mathsf{Q}) \lor (\neg\mathsf{P} \land \mathsf{Q}))$
(6) $(\mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{R}), (\mathsf{Q} \leftrightarrow \mathsf{S}) \therefore\ ((\mathsf{P} \lor \mathsf{Q}) \leftrightarrow (\mathsf{R} \lor \mathsf{S}))$

Use a truth-table to confirm that the following wffs are tautologically equivalent:

(7) $(\mathsf{P} \leftrightarrow (\mathsf{Q} \leftrightarrow \mathsf{R}))$, $((\mathsf{P} \leftrightarrow \mathsf{Q}) \leftrightarrow \mathsf{R})$.

For a trickier challenge, outline a proof from the first to the second.

(d*) First show

(1) There is a proof of $(\alpha \to \gamma)$ from the premisses Γ if and only if there is a proof of γ from Γ, α.

(2) There is a proof of $(\gamma \to \bot)$ from the premisses Γ if and only if there is a proof of $\neg\gamma$ from Γ.

And now show the following:

(3) The results of Exercises 21(b*) and 22(b*) still obtain when S is the whole PL proof system.

(4) If Γ are PL-consistent and $(\alpha \to \gamma)$ is one of those wffs, then either $\Gamma, \neg\alpha$ or Γ, γ (or both) are also PL-consistent.

(5) If Γ are PL-consistent and $\neg(\alpha \to \gamma)$ is one of those wffs, then $\Gamma, \alpha, \neg\gamma$ are also PL-consistent.